Spectre sonore d'une corde:

1. **Solution en oscillations libres de l'équation de d'Alembert :**
   Compte tenu des conditions aux limites imposées à une corde de longueur l, toute solution en oscillations libres de l'équation de d'Alembert s'écrit sous la forme d'une superposition de modes de vibration $y_n(x,t)$:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi vt}{l} + b_n sin\frac{n\pi vt}{l})sin\frac{n\pi x}{l}$$

   Montrer que la connaissance des conditions initiales du mouvement de vibration, soit $y(x,0)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ pour $0 \leq x \leq l$ permet de calculer les coefficients a_n et b_n.
   On donne :

$$\int_0^l sin\frac{n\pi x}{l} sin\frac{m\pi x}{l} = \frac{l}{2}\delta_{n,m}$$

   avec

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

2. **Corde de piano :** A l'instant $t = 0^-$, la corde est immobile dans la position d'équilibre $y(x,0) = 0$. Elle est frappée avec un marteau de largeur e ($e \ll l$) situé entre les abcisses $x = a$ et $x = a + e$, qui communique par le choc une impulsion initiale à la partie frappée. Dans ces conditions, la vitesse de chaque point de la corde à l'instant $t = 0^+$ est modélisé par une fonction créneau :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = u & \text{si } a \leq x \leq a+e \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

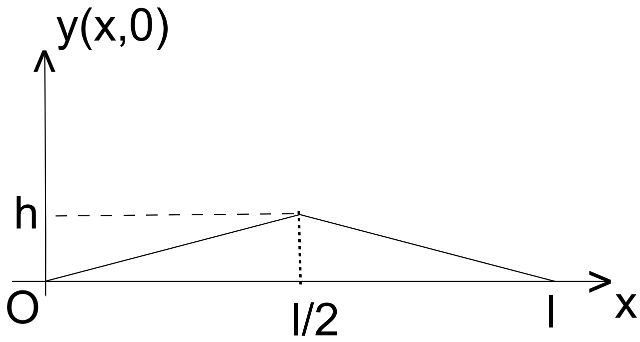
   (a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de u, e, n, l, v et a.

   (b) Trouver une application musicale du fait que les coefficients dépendent de a. Que faut-il faire pour supprimer le premier harmonique dissonant défini par $n = 7$? Faire un dessin de la corde et expliquer.

   (c) Dans le cas $a = l/2$, quels sont les harmoniques présents dans le son émis par la corde frappée ? Ce résultat était prévisible ? Donner $y(x,t)$. Quels phénomènes limitent en fait la création des modes de n élevé pour les instruments à cordes frappées ?

3. **Corde de clavecin :**
La même corde de longueur l est à présent pincée et lâchée à $t = 0$ de telle manière que sa vitesse initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0$. La position initiale de la corde est définie par la fonction triangle suivante :

$$\begin{cases} y(x,0) = 2hx/l & \text{si } 0 \leq x \leq l/2 \\ \\ y(x,0) = 2h(l-x)/l & \text{si } l/2 \leq x \leq l \end{cases}$$

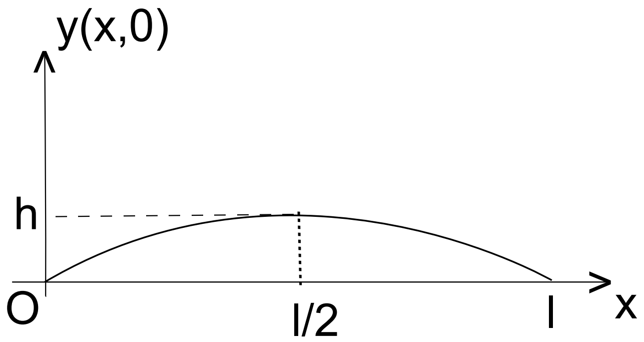


   (a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de n, l et h. Comment varient ces grandeurs en fonction de n ?

   (b) Comparer les spectres d'une corde de piano et d'une corde de clavecin. Apprécier objectivement la différence de timbre sonore dans le cadre de l'étude ci-dessus.

4. **Corde de guitare :**
Le pincement de la corde peut-être réalisé de manière plus délicate que précédemment. Lorsqu'il est effectué avec le doigt comme sur une corde de guitare ou de harpe, des conditions initiales plus régulières sont adoptées :

$$\begin{cases} y(x,0) = 4hx(l-x)/l^2 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$$



   (a) Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de n, l et h. Comment varient ces grandeurs en fonction de n ?

   (b) Comparer ce spectre aux spectres précédents. Conclure.