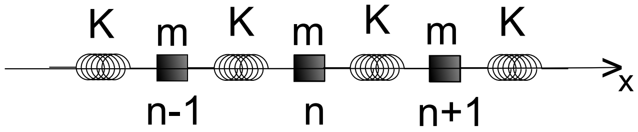
Ondes sur une chaîne d'atomes:

Une chaîne linéaire est constituée d'atomes identiques de masse m. A l'équilibre, ils sont séparés par une distance a et l'atome n se trouve à l'abcisse x_n^0. Lorsqu'une perturbation longitudinale modifie suivant l'axe Ox La position de l'atome n d'une quantité $u_n \ll a$, celui ci est alors soumis à des interactions modélisées par des forces de rappel de raideur K, limitées aux atomes premiers voisins.



1. **Chaîne infinie :**
   La chaîne est supposée infinie c'est à dire illimitée.
   (a) Ecrire l'équation du mouvement de l'atome de rang n.
   (b) On veut montrer que des ondes élastiques de pulsation ω et de vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u}_x$ peuvent se propager le long de la chaîne. Elles sont de la forme
   $$\underline{u}_n = Ae^{i(kx_n^0 - \omega t)}$$
   – Pourquoi A ne dépend-il pas de n ?
   – Trouver la condition que ω et k doivent satisfaire.
   – Commenter et dessiner le graphe $\omega = \omega(k)$.
   (c) Quelle est la pulsation maximale ω_M des ondes qui peuvent se propager dans la chaîne ? Expliquer cette notion et préciser dans ce cas le type de mouvement des atomes.
   (d) Calculer les vitesses de phase et de groupe et en donner les limites pour $ka \to 0$ et $ka \to \pi$. Commenter.
   (e) Calculer la fréquence maximale f_M pour $a = 4.10^{-10}m$, $m = 2.10^{-25}kg$ (soit $M \approx 120g.mol^{-1}$) et $K = 25N.m^{-1}$. Dans quel domaine se trouve-t-elle ? Que vaut alors la longueur d'onde λ_M ? Commenter.
   (f) On estime à $f_l = f_M/100$ la fréquence au dessous de laquelle la relation $\omega(k)$ peut-être considérée comme linéaire. Quelles sont les célérités c_l des ondes et la longueur d'onde λ_l correspondante ? Commenter.
   (g) Dans ce dernier cas, $(ka \ll \pi)$, justifier que l'ensemble des u_n puisse être représenté par une fonction continue $u(x,t)$ où la variable x représente l'emplacement au repos d'un atome. Etablir l'équation vérifiée par $u(x,t)$. Retrouver dans ces conditions la célérité c_l des ondes.

(h) Dans cette question, on revient à la notation réelle :

$$u_n = Acos(kna - \omega t)$$

Déterminer les moyennes temporelles :

- $< Ec_n >$ de l'énergie cinétique de l'atome de rang n,
- $< Ep_n >$ de l'énergie potentielle de l'atome de rang n, en prenant la demi-somme des énergies potentielles des deux liaisons de l'atome de rang n. La comparer à $< Ec_n >$.
- $< Em_n >$ de l'énergie mécanique de l'atome de rang n. A quoi s'identifie ce résultat ? Pourquoi est-il indépendant de n ?

(i) De quel type d'onde s'agit-il ?

2. **Chaîne finie :**
La chaîne est à présent finie, limitée à $2N + 1$ atomes avec $n \in [-N, N]$. Les atomes aux extrémités de la chaîne sont maintenus fixes et on étudie les modes propres sinusïdaux sous la forme :

$$\underline{u}_n = (Ae^{ikna} + Be^{-ikna})e^{-i\omega t}$$

(a) A quelle réalité physique correspond ces conditions aux limites ? Justifier le choix de la solution et donner la signification physique des constantes A et B.

(b) Pourquoi la relation de dispersion du système est-elle inchangée par rapport au cas de la chaîne infinie ?

(c) Montrer que k est désormais quantifié. On le notera k_p et on l'exprimera en fonction de p, N et a. Que dire alors de ω ?

(d) Donner alors une solution des modes propres stationnaires $\underline{u}_{n,p}$ en distinguant les cas p pairs et p impairs. Quel est dans chaque cas l'amplitude du mouvement de l'atome central $n = 0$?

(e) Il est commode de substituer à l'expression des conditions aux limites précédentes des conditions aux limites périodiques (conditions de Born Von Karman) en remplaçant la chaîne réelle de longueur finie $L = 2Na$ par une chaîne fictive illimitée de période 2L. Justifier cette macro-période et vérifier que l'écriture $\underline{u}_n = \underline{u}_{n+4N}$ conduit au même jeu de pulsations propres ω_p.