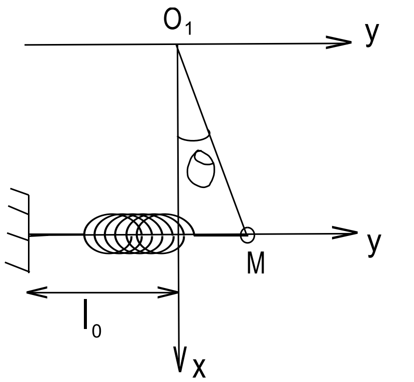
Théorème du moment cinétique d'un point matériel:

Exercice 1.
Soit un mouvement à force centrale. Démontrer la loi des aires.

Exercice 2.
Une particule de masse m se déplace sans frottement solide sur un plan horizontal. O est un point fixe de ce plan. Lorsque la particule est en M avec une vitesse $\overrightarrow{v}$, elle est soumise à une force de rappel $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{r}$ (avec $k \geq 0$) et à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f}_d = -\alpha\overrightarrow{v}$.

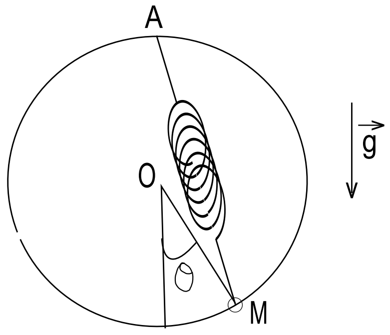
1. *Montrer que le moment cinétique par rapport à O vérifie une équation différentielle du premier ordre.*
2. *On adopte les coordonnées polaires (r, θ). Dans le cas particulier où $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ constante, sachant que $r(0) = r_0$ et $\theta_0 = 0$,*
   - *Donner l'équation horaire r(t) de la trajectoire. Quel est son nom ?*
   - *Trouver la relation entre ω, α et k.*

Exercice 3.
Un point M de masse m est relié à un fil inextensible de longueur $O_1M = L$ et à un ressort horizontal (k, l_0). Le fil est vertical lorsque le point matériel se trouve au repos en O_1'. On suppose le cas des petites oscillations horizontales du point M tel que $O_1'M \ll L$.



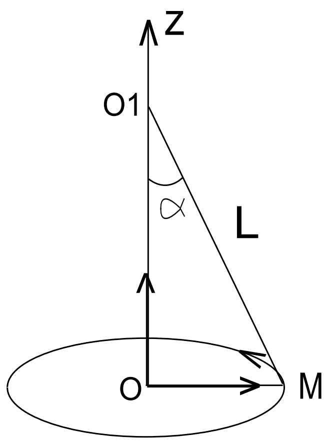
Etablir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. En déduire la période T_0 des petites oscillations.

Exercice 4.
Une particule de masse m est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle vertical de rayon R. Elle est reliée au point A par un ressort (k, l_0).



1. *Etablir par 3 méthodes différentes l'équation du mouvement de M.*
2. *Discuter des équilibres et de leur stabilité.*

Exercice 5.
Un point matériel M (masse m) est suspendu à un fil inextensible (de masse négligeable et de L) attaché en un point O_1 *fixe d'un axe Oz. Le point matériel M est astreint à tourner autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante* ω *dans le référentiel d'étude (Oxyz).*



1. *Exprimer le moment cinétique* $\overrightarrow{L}_{O1}$ *dans la base cylindrique telle que* $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u}_r$ *où* $R = L sin\alpha$.
2. *En appliquant le théorème du moment cinétique en* O_1*, déduire l'angle d'inclinaison* α *du pendule avec l'axe Oz en fonction de L,* ω *et du champ de pesanteur g.*