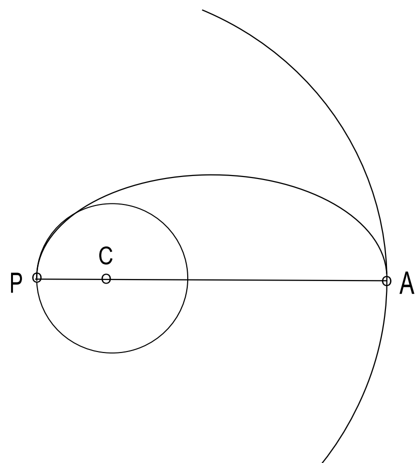
Mouvements dans un champ newtonien à force centrale:

Exercice 1. *Mouvement parabolique :*
Soit un point M décrivant une parabole d'équation polaire $r = \frac{p}{1+cos(\theta)}$*, de foyer F confondu avec O. Sachant que* $p = \frac{mC^2}{k}$*, déterminer l'énergie mécanique* E_m *au point A où la distance* $OM = r$ *est minimale.*

Exercice 2. *Changement d'orbite, orbite de transfert :*
La Terre est supposée sphérique de centre C et de rayon R. On note g l'intensité de pesanteur au niveau du sol.
$R = 6400km,\ g = 9.8ms^{-2}$.

1. *Un satellite de masse m décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon R. Donner la vitesse* v_0 *et la période* T_0 *de ce satellite. Comment s'appelle cette vitesse ?*
2. *Un satellite est géostationnaire lorsqu'il semble fixe pour un observateur terrestre. Sa trajectoire est donc circulaire et située dans le plan équatorial. Déterminer le rayon* r_1 *ainsi que la vitesse* v_1 *de ce satellite.*
3. *On veut faire passer un satellite de l'orbite rasante à l'orbite circulaire géostationnaire. Un moteur permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse de transfert de périgée P et d'apogée A.*
   – *Déterminer les vitesses* v_0' *et* v_1' *en P et en A.*
   – *Calculer le durée du transfert de P à A.*



NB : On a $R = PC$ et $r_1 = CA$.

Exercice 3. *:*
Soit un astéroïde de masse m, en mouvement circulaire de rayon r autour d'une planète de masse $m' \gg m$. Il se produit une explosion de la planète dont la masse devient $m'/2$. Calculer alors l'énergie mécanique de l'astéroïde et préciser sa trajectoire.

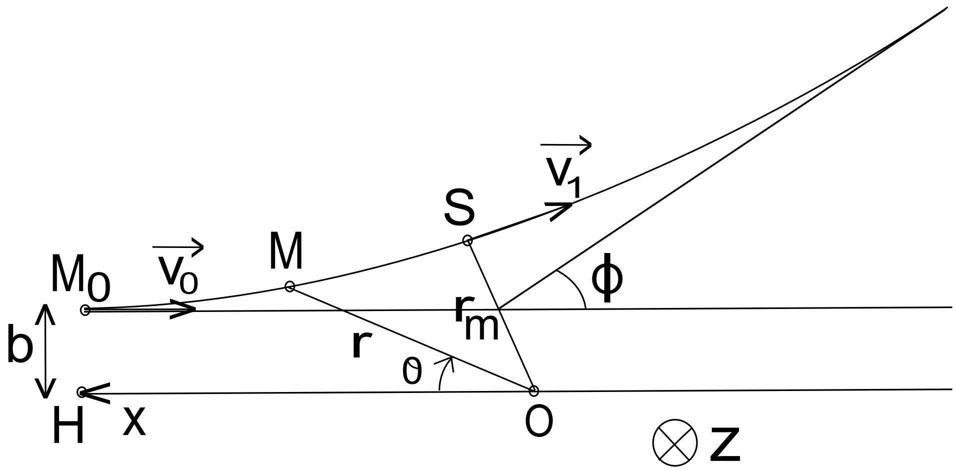
Exercice 4. *:*
Evaluer le rayon d'une planète telle qu'en sautant à pieds joints, on puisse échapper à la pesanteur. On estimera que sur Terre, on peut élever son centre de gravité de 50 cm en sautant et que les deux planètes ont même densité.

Exercice 5. ***Expérience de Rutherford :***
On s'intéresse à l'expérience réalisée en 1911 par Sir Ernest Rutherford et ses collaborateurs : Des noyaux d'Hélium (particules α émises par radioactivité), sont envoyées sur une cible constituée d'une mince feuille d'or. L'impact de ces particules sur des écrans au sulfure de Zinc provoque une scintillation qui permet de mesurer la déviation qu'elles ont subie.
L'expérience montre que l'immense majorité des particules traverse la cible sans être déviée alors que certaines d'entre elles subissent une déviation parfois supèrieure à 90°.
Rutherford a supposé que les fortes déviations étaient dues à la répulsion électrostatique entre les particules α et la partie de l'atome chargée positivement, montrant ainsi que les charges positives de l'atome était répartie dans une petite région de l'espace : le noyau. Cette expérience a de plus permis de fixer une borne supérieure à la dimension du noyau.

Un noyau d'Hélium (particule α de masse m_1 et de charge $q_1 = 2e$) subit une force de répulsion électrostatique d'un noyau d'or quasiment immobile de masse m_2 et de charge $q_2 = Ze$ centré au point O. On notera cette force

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_r = \frac{B}{r^2}\vec{u}_r$$

La distance entre le support de la vitesse initiale $\vec{v}_0$ (loin du point O) et la droite passant par O et parallèle à $\vec{v}_0$ est appelé paramètre d'impact et noté b.



1. ***Distance minimale d'approche et paramètre d'impact :***
   (a) *Montrer que le moment cinétique* $\overrightarrow{L_O}$ *du point M calculé en O se conserve. En déduire que le mouvement est plan et qu'on peut définir en coordonnées polaires une constante* $C = r^2\dot{\theta}$ *(constante des aires).*

   (b) *Donner l'expression de l'énergie potentielle* E_p *dont dérive* $\overrightarrow{f}$. *En déduire que l'énergie mécanique* E_m *du point M se conserve.*

   (c) *Donner les expressions du moment cinétique* $\overrightarrow{L}_O$ *et de l'énergie mécanique* E_m *calculés en* M_0 *(instant initial) en fonction de* m, v_0 *et* b.

   (d) *Donner les expressions du moment cinétique* $\overrightarrow{L}_O$ *et de l'énergie mécanique* E_m *calculés en S (distance minimale) en fonction de* m, v_1 *et* B *et* r_m *(on remarquera une propriété de la vitesse à cet endroit).*

   (e) *Utiliser la conservation de ces deux grandeurs en* M_0 *et S afin de d'obtenir une équation du second degré vérifiée par* r_m.

   (f) *En déduire que :*

   $$r_m = \frac{B}{mv_0^2}(1 + \sqrt{1 + (mv_0^2 b/B)^2})$$

   b n'étant pas accessible à la mesure, nous allons chercher une relation entre b et l'angle de déviation ϕ.

2. ***Paramètre d'impact et déviation :***
   On définit le vecteur (intégrale vectorielle de Laplace) :

   $$\overrightarrow{A} = m\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L}_O + mB\overrightarrow{u}_r$$

   (a) *Montrer que* $\overrightarrow{A}$ *est une constante du mouvement.*

   (b) *Exprimer* $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{u}_x$ *aux instants initial et final (on fera attention à l'orientation de* $\overrightarrow{u}_r$ *et* $\overrightarrow{u}_\theta$*).*

   (c) *Utiliser la conservation de* $\overrightarrow{A}$ *afin de montrer la relation :*

   $$tan(\phi/2) = \frac{B}{mv_0^2 b}$$

   (d) *En déduire que* $r_m = K(1 + 1/sin(\phi/2))$.

3. ***Distance minimale d'approche :***
   (a) *A l'aide des relations trouvées aux questions 1 et 2, montrer que :*

   $$r_m = \frac{B}{mv_0^2}(1 + sin(\phi/2)^{-1})$$

   (b) *On donne :* $m = 6,64.10^{-27}kg$, $e = 1,6.10^{-19}C$, $v_0 = 1,70.10^7 m.s^{-1}$, $\phi = \pi/2$, $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}F.m^{-1}$ *et* $Z = 79$. *Calculer* r_m.

   (c) *Conclure.*

Exercice 6. *Impact d'une comète à la surface de la Terre :*
Il y a de cela environ 65 millions d'années, les dinosaures et de nombreuses autres espèces vivantes ont été victimes d'une extinction massive et brutale (évènement à la limite entre le crétacé et le tertiaire). Parmi les diverses hypothèses proposées, celle qui recueille à l'heure actuelle le plus de suffrages dans la communauté scientifique est celle de l'impact d'une comète à la surface de la Terre. Cet exercice propose d'étudier la vitesse que peut avoir une telle comète lors de son impact avec la Terre.

Un ensemble d'astéroïdes de faible dimension se trouve vraisemblablement réparti dans le système solaire au delà de l'orbite de pluton. La masse de ces astéroïdes (nuage de Oort) représente environ le tiers de la masse totale des 9 planètes du système solaire. Lorsqu'un de ces astéroïdes est suffisamment dévié de sa trajectoire quasi-circulaire (par l'effet gravitationnel d'autres planètes ou astéroïdes), il peut s'approcher à très courte distance du soleil et prend le nom de comète.

Nous étudions ici une comète C *de masse* $m = 2,5.10^{15} kg$ *ayant pour trajectoire autour du soleil une ellipse très allongée. Elle est aussi caractérisée par une distance maximale au soleil* $d_{max} = 5.10^4 a$ *où* $a = 1,5.10^{11} m$ *est le rayon de la trajectoire supposée circulaire de la Terre autour du soleil. On note* T_0 *la période du mouvement de la Terre autour du soleil (*$T_0 = 365,25$ *jours).*

1. *Comment appelle t-on a ?*
2. *Déterminer numériquement la vitesse* v_0 *de la Terre sur son orbite circulaire autour du Soleil.*
3. *On note G la constante de gravitation universelle et* M_S *la masse du Soleil. Exprimer le produit* $G.M_S$ *en fonction de* v_0 *et a.*
4. *Les distances minimales et maximales de C au soleil sont notées* d_m *et* d_M*. Exprimer, en fonction de* d_m*,* d_M*, a et* v_0*, les vitesses maximale* v_M *et minimale* v_m *de C sur son orbite. On utilisera les relations de conservation.*
5. *Quelle relation doivent vérifier* d_m *et a pour qu'un impact de C sur la surface de la Terre puisse être envisagé ? En déduire une évaluation numérique de la plus petite valeur possible de* v_m*. A quoi correspond cette valeur ?*