Corde vibrante, influence de la pesanteur:

Une corde horizontale, de longueur l, de masse linéique μ, sans raideur est fixée à ses 2 extrémités en x=0 et x=l (l'axe Oy est vertical ascendant).

1. Montrer que l'équation de propagation dans l'hypothèse des petites vibrations y(x,t) en tenant compte du poids de la corde est :

$$\mu\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{g}{v^2}$$

   où v est une constante à déterminer.

2. Justifier qu'une solution de cette équation peut s'écrire $y(x,t) = y_0(x,t) + y_p(x)$ avec

$$y_0(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n cos(\frac{n\pi vt}{l}) + b_n sin(\frac{n\pi vt}{l}))sin(\frac{n\pi x}{l})$$

3. Donner l'expression de $y_p(x)$.
4. La corde est écartée de sa position d'équilibre en son milieu d'une hauteur h (forme triangulaire), puis lachée sans vitesse initiale.
   - Justifier que $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l y_0(x,0)sin(\frac{n\pi x}{l})dx$.
   - Exprimer les amplitudes des harmoniques du mouvement de la corde a_n.

   Rappel : $\int_0^l sin(\frac{n\pi x}{l})sin(\frac{m\pi x}{l})dx = \frac{l}{2}\delta_{n,m}$ où $\delta_{n,m} = 1$ si $m = n$ et 0 sinon.