Notions de conduction dans les métaux:

La conductivité peut être décrite dans le modèle simple suivant : Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n, ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron de masse m et de charge $-e$ est soumis aux forces d'interaction (chocs) avec les ions, modélisées par une force de frottement fluide $-m\overrightarrow{v}/\tau$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse de l'électron par rapport au conducteur.

1. **Conducteur en régime continu, loi d'Ohm :**

   (a) Le conducteur est initialement en équilibre (électrons au repos). A partir de l'instant $t = 0$, un générateur extérieur impose de façon instantannée un champ électrique uniforme et constant suivant Oz : $\overrightarrow{E} = E_0 \overrightarrow{u}_z$.

      i. Ecrire et intégrer l'équation du mouvement d'un électron en exprimant la vitesse $\overrightarrow{v}$ en fonction de m, τ, e et E_0. Que représente physiquement τ ?

      ii. Montrer qu'en régime permanent, $\overrightarrow{v}$ tend vers une valeur limite $\overrightarrow{v}_l$. En déduire la loi d'Ohm locale $\overrightarrow{j} = \sigma_0 \overrightarrow{E}_0$. Exprimer la conductivité σ_0 en régime continu en fonction de n, e, m et τ.

      iii. Application numérique : pour le cuivre, on donne $\sigma_0 = 5,8.10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$, $n = 1,1.10^{29} m^{-3}$ et $m = 9,11.10^{-31} kg$. En déduire la valeur de τ. Commenter.

   (b) Le conducteur est de forme cylindrique, de section constante S et de longueur L limitée entre deux points A et B de son axe Oz.

      i. Montrer que la différence de potentiel entre les points A et B est proportionnelle au courant I traversant le cylindre : $V_A - V_B = R_0 I$. Exprimer la résistance R_0 en fonction de L, σ_0 et S.

      ii. Déterminer la puissance P transmise par le générateur aux électrons situés entre A et B en fonction de R_0 et I.

2. **Conducteur en régime variable, épaisseur de peau :**

   (a) Le générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω parallèle à Oz et qui dans le conducteur est supposé uniforme :

   $$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 e^{i\omega t} \overrightarrow{u}_z$$

      i. Déterminer en régime permanent la vitesse $\underline{\overrightarrow{v}}$ d'un électron.

ii. Montrer que la loi d'Ohm locale s'écrit $\overrightarrow{\underline{j}} = \sigma\overrightarrow{\underline{E}}$ où σ est complexe. L'exprimer en fonction de σ_0, ω et τ. Quelles sont les deux différences importantes avec le cas du régime continu ?

iii. jusqu'à quelle fréquence f_c peut on utiliser, pour le cuivre, la valeur σ_0 du régime continu sans commettre une erreur supérieure à un pour cent ?
La suite du problème concerne le cas $f < f_c$.

iv. Montrer alors que le courant de déplacement $\overrightarrow{j}_D = \epsilon_0 \partial \overrightarrow{E}/\partial t$ est négligeable devant le courant de conduction $\overrightarrow{j}$. On prendra $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12} SI$.

v. Pourquoi l'hypothèse de l'uniformité de E en régime variable n'est-elle certainement pas valable ?

(b) On se propose de corriger cette hypothèse dans le cas du conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a.

i. Montrer, en utilisant l'équation de conservation de la charge que la densité volumique de charges est nulle dans le conducteur en régime sinusoïdal.

ii. Déduire des équations de Maxwell l'équation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.

iii. Montrer qu'une solution du type

$$\overrightarrow{\underline{E}} = E_0.e^{-(1+i)(a-r)/\delta}.e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_z$$

convient si $\delta \ll r$ où r est la distance d'un point du conducteur à son axe et δ une longueur qu'on exprimera an fonction de μ_0, σ et ω.
On donne en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$

iv. Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude de E en fonction de r.