# Cinématique des fluides:

**Exercice 1.** *$k$, $a$ et $b$ étant des constantes positives, on considère deux écoulements plans définis par leur champs des vitesses :*

- *Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\overrightarrow{v}(M) = k(-x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y)$*
- *Pour $x + at > 0$ et $y - bt > 0$, $\overrightarrow{v}(M) = [-kx - a(kt+1)]\overrightarrow{u}_x + [ky + b(-kt+1)]\overrightarrow{u}_y$*

*Pour chacun de ces écoulements étudier :*

1. *les lignes de courant,*
2. *la trajectoire de la particule fluide passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ à la date t=0,*
3. *l'accélération des particules fluides :*
   (a) *en utilisant la description Eulerienne,*
   (b) *en utilisant la description Lagrangienne.*

**Exercice 2.** *On considère l'écoulement défini, dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ par le champ des vitesses suivant :*

$$v_x = 2x - 3y$$
$$v_y = 3x - 2y$$
$$v_z = 0$$

1. *Montrer que l'écoulement est incompressible.*
2. *Déterminer le champ des accélérations de l'écoulement.*
   *On considère le repère $(O, \overrightarrow{u}_X, \overrightarrow{u}_Y, \overrightarrow{u}_z)$ qui se déduit du repère $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ par rotation de $\pi/4$ autour de l'axe Oz.*
3. *Déterminer les équations des lignes de courant dans le repère $(O, \overrightarrow{u}_X, \overrightarrow{u}_Y, \overrightarrow{u}_z)$. Quelle est la forme des lignes de courant ?*
4. *Déterminer le champ des vecteurs tourbillons de l'écoulement et ses lignes tourbillons.*
5. *Déterminer l'intensité du tube tourbillon qui s'appuie sur la ligne de courant passant par le point (1,1,0) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$.*

**Exercice 3.** *On modélise une tornade en assimilant l'air à un gaz parfait et en considérant son écoulement comme permanent et incompressible. Cet écoulement est caractérisé par un vecteur tourbillon $\overrightarrow{\Omega} = \Omega\overrightarrow{u}_z$ supposé uniforme à l'intérieur du cylindre (oeil du cyclone) d'axe Oz et de rayon a et nul à l'extérieur de celui ci. A la périphérie de l'oeil (r=a), la vitesse de l'écoulement a pour module u.*

1. *Montrer que le champ des vitesses est de la forme* $\overrightarrow{v} = v(r)\overrightarrow{u}_\theta$ *et étudier la fonction* $v(r)$.
2. $a = 50km$ *et* $u = 180km.h^{-1}$. *Justifier l'hypothèse d'incompressibilité et calculer* $\Omega$.

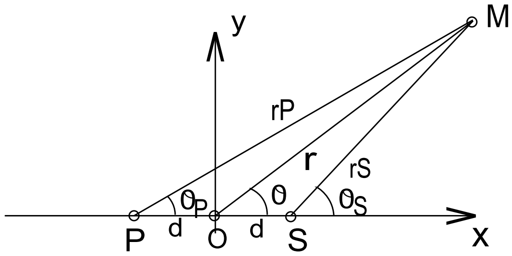
**Exercice 4.** *Etude cinématique de deux écoulements particuliers (d'après CCP) :*
*Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique* $\rho$ *en écoulement stationnaire.*
*Les obstacles introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base à priori quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe Oz. On se limitera à une étude bidimensionnelle dans le plan xOy perpendiculaire à Oz, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon Oz.*

1. ***Ecoulement tourbillonnaire :***
   *On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que :*

   – *pour* $r < a$, $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}(M) = \gamma\overrightarrow{u}_z$
   – *pour* $r > a$, $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{0}$
   *Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan xOy si l'on considère que si* $a \to 0$ *et* $\gamma \to \infty$, *le produit* $\gamma\pi a^2$ *demeure égal à une valeur finie* $\Gamma$ *que l'on nomme intensité du tourbillon.*

   (a) *Etablir l'expression de* $\overrightarrow{v}(M)$ *en coordonnées polaires pour* $r > a$ *avec* $\Gamma$ *comme paramètre.*
   (b) *A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cette écoulement.*

2. ***Ecoulement d'un doublet :***
   *On considère un écoulement engendré par un doublet résultant de l'association d'une source et d'un puits.*




   (a) *La source se situe le long de l'axe* $S_z$, *le point S ayant pour coordonnées dans le plan xOy* $(d, 0)$ *avec* $d > 0$. *L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur D. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on fait circuler de l'eau sous pression.*
   *Etablir l'expression de la vitesse* $\overrightarrow{v}_S(M)$ *du fuide en coordonnées cylindriques* $(r_S, \theta_S, z_S)$ *d'axe polaire* $S_z$ *ainsi que le potentiel* $\phi_S(M)$ *associé, défini par* $\overrightarrow{v}_S(M) = \overrightarrow{grad}(\phi_S(M))$.
   (b) *Le puits se situe le long de l'axe* $P_z$, *le point P ayant pour coordonnées dans le plan xOz* $(-d, 0)$. *Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également D.*
   *Donner sans démonstration l'expression de la vitesse* $\overrightarrow{v}_P(M)$ *du fluide en coordonnées cylindriques* $(r_P, \theta_P, z_P)$ *d'axe polaire* $P_z$ *ainsi que le potentiel* $\phi_P(M)$ *associé.*

(c) *Soit $\phi(M)$ le potentiel des vitesses dans le cas où on associe la source et le puits pour former un doublet dans lequel $d \to 0$ et $D \to \infty$ de sorte que le produit $2dD$ demeure égal à une valeur finie $H$ que l'on nommera intensité du doublet.*

i. *En coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ d'axe polaire $Oz$, montrer que :*

$$\phi(M) = -\frac{H}{2\pi}\frac{cos\theta}{r}$$

ii. *En déduire l'expression en coordonnées cylindriques de la vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ créée par ce doublet avec $H$ comme paramètre.*

(d) *A quelle distribution électromagnétique peut-on eventuellement comparer ce doublet ?*

3. ***Ecoulement autour d'un cylindre en rotation :***
*Un cylindre de base circulaire de rayon $R$ et en rotation uniforme à la vitesse angulaire $\omega$ autour de son axe $Oz$ est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse $\overrightarrow{U} = U\overrightarrow{u}_x$. Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide, nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'extérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :*
*– un doublet d'axe $Oz$ et d'intensité $H$ qui engendre un champ de vitesse $\overrightarrow{v}_D(M)$,*
*– un tourbillon d'axe $Oz$ et d'intensité $\Gamma$ qui engendre un champ tourbillon $\overrightarrow{v}_T(M)$.*

(a) *Les coordonnées polaires de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de cet écoulement à pour expression :*

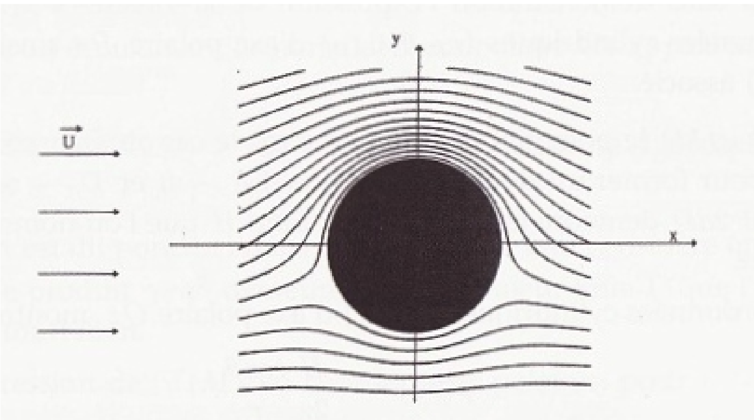
$$v_r = U(1 - \frac{R^2}{r^2})cos(\theta)$$

*et*

$$v_\theta = -U(1 + \frac{R^2}{r^2})sin(\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

*En s'appuyant sur les résultats précédents, justifier ces expressions en explicitant le paramètre $H$ en fonction de $R$ et $U$.*

(b) *On donne le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de $U$, $R$ et $\Gamma$ :*



i. *Comparer le module $v$ de la vitesse du fluide pour les points situés sur l'axe $Oy$ selon que $y > R$ et $y < R$.*

ii. *Indiquer le signe de $\Gamma$ et préciser le sens de rotation du cylindre.*

iii. *En exploitant le tracé, justifier l'existence d'un poit d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner $|\Gamma|$ en fonction de U, R et $sin(\theta_a)$ dont on précisera la valeur approchée en degrés.*

(c) *Soit $\overrightarrow{F}$ la résultante de l'action de l'air sur le cylindre. Donner sans calcul les valeurs de la composante $F_x$ et celle du moment par rapport à l'axe $Oz$ de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?*

(d) *Exprimer la pression $P(\theta)$ à la surface du cylindre en fonction de U, R, $\rho$, $\Gamma$ et $P_0$.*

(e) *Le cylindre ayant une hauteur h, établir l'expression de la composante $F_y$ pour les valeurs numériques suivantes : $U = 15ms^{-1}$, $R = 1m$, $\rho = 1,3kgm^{-3}$ et $h = 3m$.*

(f) *Comment les lignes de courant sont elles modifiées en tenant compte la viscosité $\eta$ de l'air. Quel paradoxe lève-t-on ?*