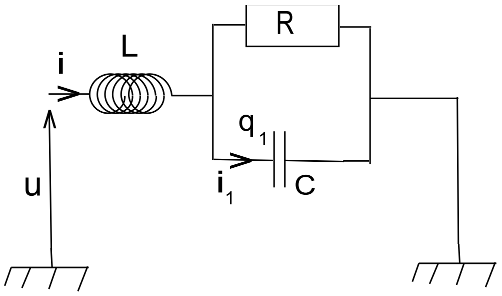
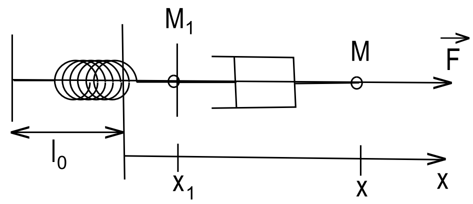
Oscillateurs, portrait de phase:

Exercice 1. *Equivalence électromécanique :*

1. *Un circuit constitué d'une bobine d'inductance L, en série avec un groupement parallèle R,C est alimentée par une tension u. On note $i(t)$ et $i_1(t)$ les courants circulants respectivement dans la bobine et le condensateur (de charge $q_1(t)$). Etablir l'équation différentielle satisfaite par $q_1(t)$.*
2. *On considère un système mécanique comportant 2 points matériels M_1 de masse m_1 et M de masse m. Le point M_1 est attaché à un ressort (k, l_0) tandis que le point M est soumis à l'action d'une force horizontale $\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$. Le point M_1 est repéré par son abcisse x_1 compté à partir de sa position au repos et le point M est repéré par son abcisse x. Il existe entre M_1 et M un amortisseur fluide à piston mobile, de coefficient d'ammortissement $\alpha > 0$, qui exerce sur le point M une force $\overrightarrow{f} = -\alpha(\dot{x} - \dot{x_1})\overrightarrow{u_x}$ et sur le point M_1 une force $\overrightarrow{f_1} = -\overrightarrow{f}$.*
   - *Quelles sont les équations du mouvement des points M et M_1 ?*
   - *En supposant m_1 négligeable, établir une équation différentielle satisfaite par $x_1(t)$.*
3. *Préciser l'analogie électromécanique.*

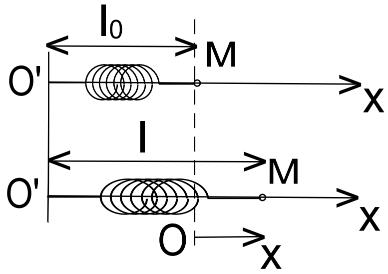




Exercice 2. *Période T d'un pendule simple :*
Soit un pendule simple (point matériel M de masse m suspendu à un fil inextensible, fixé en O, de longueur l). La position du point M est repérée par l'angle θ par rapport à la verticale. Les conditions initiales sont $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

1. *Montrer que la période des oscillations se met sous la forme $T = \int_0^{\theta_0} f(\theta) d\theta$.*
2. *Combien vaut T dans le cas des petites oscillations ?*

Exercice 3. *Régime apériodique :*
Un point matériel M de masse m attaché à un ressort (k, l_0) est astreint à se déplacer sans frottement solide le long d'un axe Ox. Sa position est repérée à partir de sa position d'équilibre par son abcisse x. Le point est de plus soumis à une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$.



1. *Donner l'équation différentielle vérifiée par x(t).*
2. *Quelle est la condition sur α, k et m pour que x(t) soit apériodique ?*
3. *Les conditions initiales étant $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, donner alors l'expression de x(t).*

Exercice 4. *Portrait de phase :*
Soit un point matériel M de masse m glissant sur une portion de cercle C de rayon R. On repère la position du point M par l'angle θ. Cet angle reste faible au cours du mouvement. On néglige les frottements solides.

1. *On néglige les frottements fluides. Déterminer la période T_0 de cet oscillateur. Représenter le portrait de phase en coordonnées $(\theta; \dot{\theta}/\Omega_0)$ où $\Omega_0 = 2\pi/T_0$.*
2. *On tient compte de la force de frottement fluide $\overrightarrow{f}_d = -\alpha\overrightarrow{v}$.*
   - *quelle est la valeur de α_c de α qui correspond au régime critique d'oscillations ?*
   - *Dans ce cas, donner l'expression de $\theta(t)$ sachant que $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.*
   - *Quelle est l'allure de la trajectoire dans l'espace des phases ?*