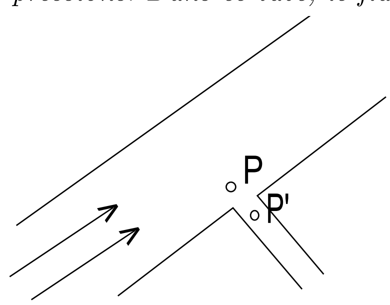
# Dynamique des écoulements parfaits incompressibles.

**Exercice 1.** *Quelques applications de la relation de Bernoulli :*
*La relation de Bernoulli caractérise l'écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible. Nous allons expliciter quelques conséquences de cette importante relation.*

1. ***Quelques aspects de la relation de Bernoulli :***
   (a) *Pression statique, pression dynamique :*
   *On a* $P + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = Cte$ *où* $z$ *est comptée positivement suivant la verticale ascendante. Cette relation s'applique le long d'une ligne de courant d'un fluide incompressible non visqueux en écoulement stationnaire. La valeur de la constante pouvant se modifier lorsque l'on passe d'une ligne de courant à une autre.*
   *On note parfois :*
      i. $P^* = P + \rho g z$ *la pression statique.*
      ii. $\frac{1}{2}\rho v^2$ *la pression dynamique.*

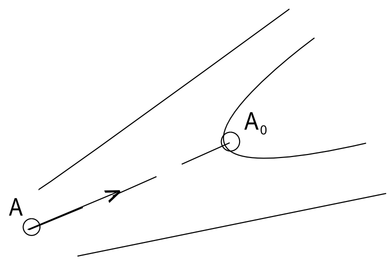
   (b) *Pression sur une prise latérale :*
   *Ce schéma présente une prise latérale effectuée sur une conduite parcourue par un fluide en mouvement. Cette prise latérale est bien souvent le point de départ d'un tube en U destiné à mesurer l'écart des pressions. Dans ce tube, le fluide est au repos.*




   *L'expérience montre que si la prise latérale a des dimensions faibles vis à vis de la section de la conduite, elle ne modifie pas l'écoulement dans cette conduite. On a alors :*

$$P = P'$$

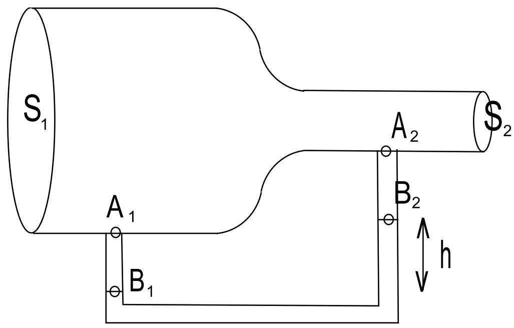
(c) *Pression en un point d'arrêt :*
*On appelle point d'arrêt un point $A_0$ tel que la vitesse de l'écoulement du fluide y est nulle.*




*La relation de Bernoulli s'écrit :*

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_{A0} + \rho g z_{A0} = Cte$$

2. ***Application : le tube de Venturi :***
*La figure suivante représente un tube de venturi.*

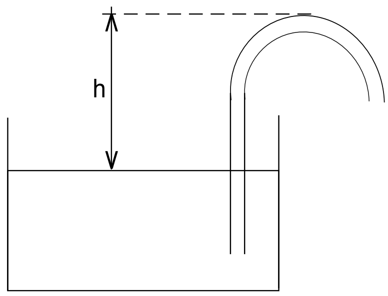



*Le tube véhicule un gaz de masse volumique $\rho$. Le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique $\rho_0$. En assimilant le gaz à un fluide incompressible, donner l'expression du débit volumique.*

**Exercice 2.** *Vidange d'un réservoir :*
*On considère un réservoir de longueur $L = 10m$, de largeur $l = 5m$, contenant initialement une hauteur $h = 2m$ d'eau. Le fond du réservoir comporte un orifice de vidange de section $s = 0,8dm^2$ au niveau duquel le jet de vidange est en contact avec l'atmosphère de pression $P_0$.*
*On suppose applicables les lois des régimes stationnaires.*

1. *Commenter l'hypothèse de stationnarité.*
2. *Calculer dans ces conditions la vitesse de l'écoulement au niveau de cette section en fonction de la hauteur d'eau dans le réservoir.*
3. *Calculer le temps nécessaire à la vidange du réservoir.*

**Exercice 3.** *Siphon de vidange :*
*Un siphon permet l'écoulement de l'eau d'un réservoir de grandes dimensions. Il est réalisé dans un tuyau de $0,1m$ de diamètre. Sa ligne centrale s'élève à $h = 4m$ au dessus de la surface libre.*



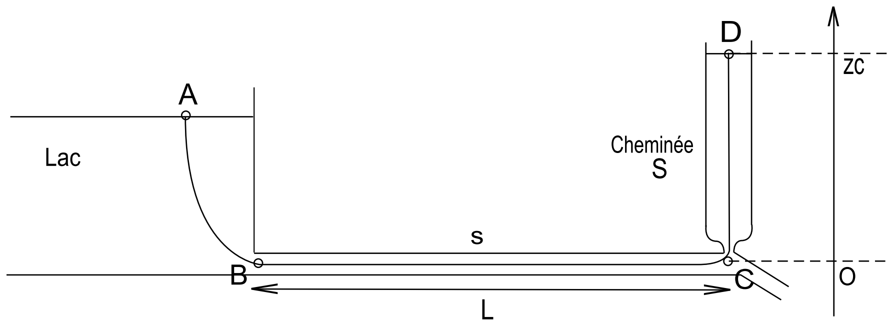

*On note $P_v$ le pression de vapeur saturante de l'eau.*

1. *En quels points du tuyau la pression est-elle minimale dans le syphon ?*
2. *Quel est le débit maximum que l'on peut obtenir avec ce dispositif sans qu'il se produise de cavitation ?*
3. *La valeur de $P_v$ étant négligeable, quelle est la côte du point de sortie du tuyeau permettant d'obtenir ce débit maximum ?*

**Exercice 4.** *Etude de la surface libre engendrée par un tourbillon :*
*Soit un récipient rempli d'eau. On crée un tourbillon de vecteur $\overrightarrow{\Omega} = \Omega_0 \overrightarrow{u}_z$ au centre de ce récipient, dans un cylindre de rayon a (l'axe Oz est vertical ascendant). On suppose que, au repos, le fluide occupe le demi-espace $z < 0$.*

1. *Déterminer le champ des vitesses en tout point de l'espace.*
2. *Déterminer le champ des accélérations en tout point de l'espace. On utilisera pour l'accélération convective l'expression :*
$$\frac{1}{2}\overrightarrow{grad}(v^2) + \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{v}$$
.
3. *Donner l'expression du champ des pressions.*
4. *Définir la surface libre. Donner son expression et la dessiner.*

**Exercice 5.** *Etude d'une cheminée de barrage (d'après ESIM) :*
*Un barrage hydroélectrique est constitué d'une galerie d'aménagement de longueur $L = 10km$ et de section $s = 10m^2$ reliée à une retenue d'eau (un lac de superficie assez grande pour que l'on puisse négliger les variations du niveau) et à une cheminée d'équilibre verticale de section $S = 100m^2$. Une vanne immédiatement en aval de la cheminée alimente les turbines de la centrale électrique. L'eau est considérée comme non visqueuse. La galerie a un débit $q_v = 30m^3s^{-1}$. On prend un axe Oz ascendant dont l'origine est au niveau de la vanne. On appelle $z_l$ la cote de surface du lac et $z_c$ celle de l'eau dans la cheminée. On pose $h = z_c - z_l$ et on prend $g = 10m.s^{-2}$.*




1. *La vanne est ouverte et le régime permanent. En déduire la dénivellation* $h_0$.
2. *On ferme rapidement la vanne à* $t = 0$. *On s'interesse alors au mouvement du fluide. L'écoulement est irrotationnel.*
   (a) *Entre les instants* $t$ *et* $t + dt$, $h$ *varie de* $dh$. *Etablir la relation liant la vitesse* $v$ *du fluide dans la galerie à* $h$.
   (b) *Intégrer l'équation d'Euler sur la ligne de courant ABCD. On considèrera que l'intégrale de* $\frac{D\vec{v}}{dt}$ *entre A et D est quasiment égale à celle entre B et C vu la longueur de la galerie. En déduire l'équation :*
   $$\ddot{h} + \frac{gs}{LS}h = 0$$
   (c) *En déduire* $h(t)$. *A quelle hauteur maximale* $h_M$ *s'élève l'eau dans la cheminée ? Application numérique. On définira avec soin les conditions initiales à* $t = 0$.
3. *En réalité, la cheminée à une hauteur* $h_1 = 20m$.
   (a) *Etablir l'équation différentielle de la vitesse* $v$ *quand l'eau déborde de la cheminée. En déduire que* $v$ *varie linéairement avec le temps.*
   (b) *Comment évolue* $h(t)$ *une fois le déversement fini ? En réalité que se passe-t-il ?*
   (c) *Si on ne plaçait pas la cheminée, que se passerait-il ?*