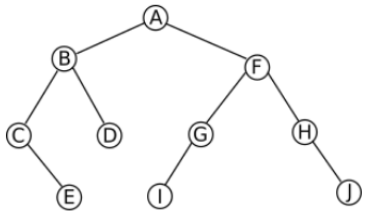
Algorithmique: algorithmes sur les arbres binaires :

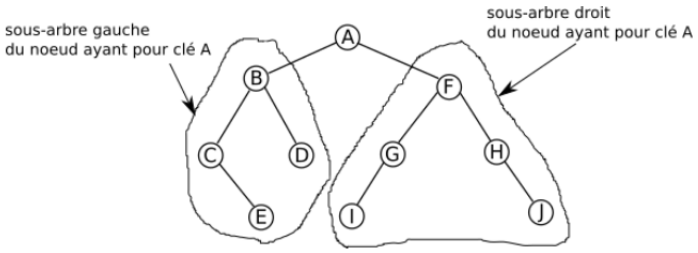
Il est conseillé de relire au moins une fois le cours consacré aux arbres (`https://pixees.fr/informatiquelycee/n_site/nsi_term_structDo_arbre.html`). Avant d'entrer dans le vif du sujet (les algorithmes), nous allons un peu approfondir la notion d'arbre binaire:

À chaque noeud d'un arbre binaire, on associe une clé ("valeur" associée au noeud on peut aussi utiliser le terme "valeur" à la place de clé), un "sous-arbre gauche" et un "sous-arbre droit". Soit l'arbre binaire suivant:



Si on prend le noeud ayant pour clé A (le noeud racine de l'arbre) on a:

- le sous-arbre gauche est composé du noeud ayant pour clé B, du noeud ayant pour clé C, du noeud ayant pour clé D et du noeud ayant pour clé E.
- le sous-arbre droit est composé du noeud ayant pour clé F, du noeud ayant pour clé G, du noeud ayant pour clé H, du noeud ayant pour clé I et du noeud ayant pour clé J.



Si on prend le noeud ayant pour clé B on a:

- le sous-arbre gauche est composé du noeud ayant pour clé C et du noeud ayant pour clé E
- le sous-arbre droit est uniquement composé du noeud ayant pour clé D

Un arbre (ou un sous-arbre) vide est noté NIL (NIL est une abréviation du latin nihil qui veut dire "rien").

Si on prend le noeud ayant pour clé G on a:

- le sous-arbre gauche est uniquement composé du noeud ayant pour clé I
- le sous-arbre droit est vide (NIL)

Il faut bien avoir en tête qu'un sous-arbre (droite ou gauche) est un arbre (même s'il contient un seul noeud ou pas de noeud de tout (NIL)).

Soit un arbre T: T.racine correspond au noeud racine de l'arbre T. Soit un noeud x:

- x.gauche correspond au sous-arbre gauche du noeud x
- x.droit correspond au sous-arbre droit du noeud x
- x.clé correspond à la clé du noeud x

Il faut noter que si le noeud x est une feuille, x.gauche et x.droite sont des arbres vides (NIL).

1. **Calculer la hauteur d'un arbre:**
   Nous allons commencer à travailler sur les algorithmes en nous intéressant à l'algorithme qui permet de calculer la hauteur d'un arbre:

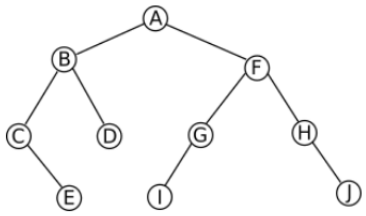
   Exercice 1: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud

DEBUT
HAUTEUR(T) :
  si T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    renvoyer 1 + max(HAUTEUR(x.gauche), HAUTEUR(x.droit))
  sinon :
    renvoyer 0
  fin si
FIN
```

   NB: la fonction max renvoie la plus grande valeur des 2 valeurs passées en paramètre (exemple: max(5,6) renvoie 6)

   Cet algorithme est loin d'être simple, n'hésitez pas à écrire votre raisonnement sur une feuille de brouillon. Vous pourrez par exemple essayer d'appliquer cet algorithme sur l'arbre binaire ci-dessous. N'hésitez pas à poser des questions si nécessaire.



Si vraiment vous avez des difficultés à comprendre le fonctionnement de l'algorithme sur l'arbre ci-dessus, vous trouverez à cette adresse (`https://pixees.fr/informatiquelycee/n_site/nsi_term_algo_arbre_corr1.html`) un petit calcul qui pourrait vous aider.

Comme vous l'avez sans doute remarqué, nous avons dans l'algorithme ci-dessus une fonction récursive. Vous aurez l'occasion de constater que c'est souvent le cas dans les algorithmes qui travaillent sur des structures de données telles que les arbres.

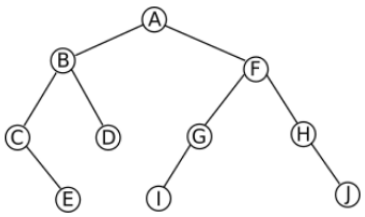
2. **Calculer la taille d'un arbre:**
   Nous allons maintenant étudier un algorithme qui permet de calculer le nombre de noeuds présents dans un arbre.

   Exercice 2: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud

DEBUT
TAILLE(T) :
  si T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    renvoyer 1 + TAILLE(x.gauche) + TAILLE(x.droit)
  sinon :
    renvoyer 0
  fin si
FIN
```

Cet algorithme ressemble beaucoup à l'algorithme étudié dans l'exercice 1, son étude ne devrait donc pas vous poser de problème. Appliquez cet algorithme à l'exemple suivant:



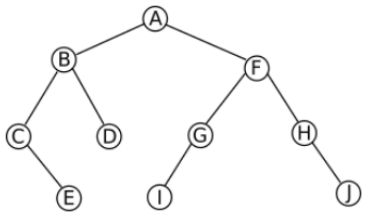
Il existe plusieurs façons de parcourir un arbre (parcourir un arbre = passer par tous les noeuds), nous allons en étudier quelques-unes:

3. **Parcourir un arbre dans l'ordre infixe:**
   Exercice 3: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud

DEBUT
PARCOURS-INFIXE(T) :
  si T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    PARCOURS-INFIXE(x.gauche)
    affiche x.clé
    PARCOURS-INFIXE(x.droit)
  fin si
FIN
```

Vérifiez qu'en applicant l'algorithme ci-dessus, l'arbre ci-dessous est bien parcouru dans l'ordre suivant : C, E, B, D, A, I, G, F, H, J

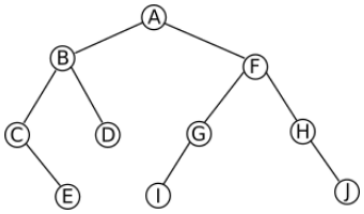


4. **Parcourir un arbre dans l'ordre préfixe:**
   Exercice 4: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud

DEBUT
PARCOURS-PREFIXE(T) :
  si T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    affiche x.clé
    PARCOURS-PREFIXE(x.gauche)
    PARCOURS-PREFIXE(x.droit)
  fin si
FIN
```

Vérifiez qu'en applicant l'algorithme ci-dessus, l'arbre ci-dessous est bien parcouru dans l'ordre suivant : A, B, C, E, D, F, G, I, H, J

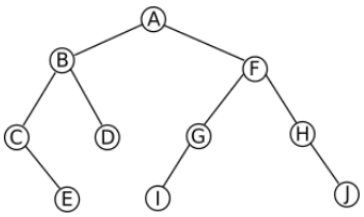


5. **Parcourir un arbre dans l'ordre suffixe:**
   Exercice 5: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud

DEBUT
PARCOURS-SUFFIXE(T) :
  si T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    PARCOURS-SUFFIXE(x.gauche)
    PARCOURS-SUFFIXE(x.droit)
    affiche x.clé
  fin si
FIN
```

Vérifiez qu'en applicant l'algorithme ci-dessus, l'arbre ci-dessous est bien parcouru dans l'ordre suivant : E, C, D, B, I, G, J, H, F, A



Le choix du parcours infixe, préfixe ou suffixe dépend du problème à traiter, on pourra retenir pour les parcours préfixe et suffixe (le cas du parcours infixe sera traité un peu plus loin) que:

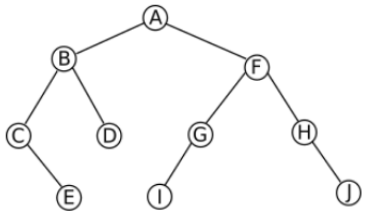
- dans le cas du parcours préfixe, un noeud est affiché avant d'aller visiter ces enfants
- dans le cas du parcours suffixe, on affiche chaque noeud après avoir affiché chacun de ses fils

6. **Parcourir un arbre en largeur d'abord:**
   Exercice 6: Étudiez cet algorithme:

```
VARIABLE
T : arbre
Tg : arbre
Td : arbre
x : noeud
f : file (initialement vide)

DEBUT
PARCOURS-LARGEUR(T) :
  enfiler(T.racine, f) //on place la racine dans la file
  tant que f non vide :
    x ← defiler(f)
    affiche x.clé
    si x.gauche ≠ NIL :
      Tg ← x.gauche
      enfiler(Tg.racine, f)
    fin si
    si x.droit ≠ NIL :
      Td ← x.droite
      enfiler(Td.racine, f)
    fin si
  fin tant que
FIN
```

Vérifiez qu'en applicant l'algorithme ci-dessus, l'arbre ci-dessous est bien parcouru dans l'ordre suivant : A, B, F, C, D, G, H, E, I, J. Selon vous, pourquoi parle-t-on de parcours en largeur?

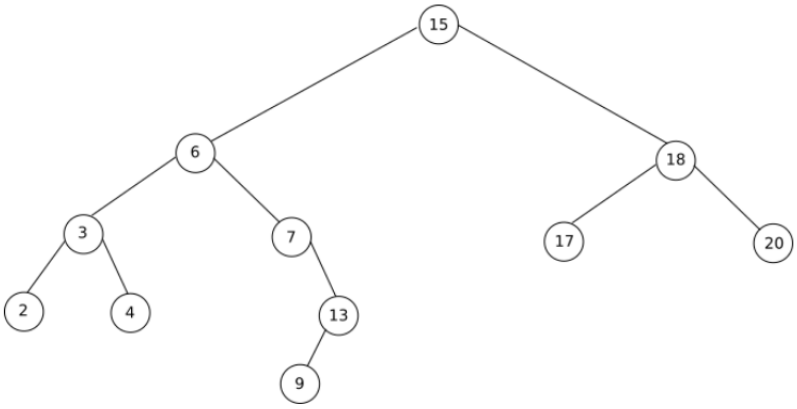


Il est important de bien noter l'utilisation d'une file (FIFO) pour cet algorithme de parcours en largeur. Vous noterez aussi que cet algorithme n'utilise pas de fonction récursive.

7. **Arbre binaire de recherche:**
   Un arbre binaire de recherche est un cas particulier d'arbre binaire. Pour avoir un arbre binaire de recherche:

   - il faut avoir un arbre binaire!
   - il faut que les clés de noeuds composant l'arbre soient ordonnables (on doit pouvoir classer les noeuds, par exemple, de la plus petite clé à la plus grande)
   - soit x un noeud d'un arbre binaire de recherche. Si y est un noeud du sous-arbre gauche de x, alors il faut que $y.cle \leq x.cle$. Si y est un noeud du sous-arbre droit de x, il faut alors que $x.cle \leq y.cle$

Exercice 7: Vérifiez que l'arbre suivant est bien un arbre binaire de recherche.



Exercice 8: Appliquez l'algorithme de parcours infixe sur l'arbre précédent. Que remarquez vous?

8. **Recherche d'une clé dans un arbre binaire de recherche:**
   Nous allons maintenant étudier un algorithme permettant de rechercher une clé de valeur k dans un arbre binaire de recherche. Si k est bien présent dans l'arbre binaire de recherche, l'algorithme renvoie vrai, dans le cas contraire, il renvoie faux.

Exercice 9: Étudiez l'algorithme suivant:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud
k : entier
DEBUT
ARBRE-RECHERCHE(T,k) :
  si T == NIL :
    renvoyer faux
  fin si
  x ← T.racine
  si k == x.clé :
    renvoyer vrai
  fin si
  si k < x.clé :
    ARBRE-RECHERCHE(x.gauche,k)
  sinon :
    ARBRE-RECHERCHE(x.droit,k)
  fin si
FIN
```

Exercice 10: Appliquez l'algorithme de recherche d'une clé dans un arbre binaire de recherche sur l'arbre précédent. On prendra k = 13.

Exercice 11: Appliquez l'algorithme de recherche d'une clé dans un arbre binaire de recherche sur l'arbre précédent. On prendra k = 16.

Cet algorithme de recherche d'une clé dans un arbre binaire de recherche ressemble beaucoup à la recherche dichotomique vue en première. C'est principalement pour cette raison qu'en général, la complexité en temps dans le pire des cas de l'algorithme de recherche d'une clé dans un arbre binaire de recherche est $O(log_2(n))$

À noter qu'il existe une version dite "itérative" (qui n'est pas récursive) de cet algorithme de recherche:

Exercice 12: Étudiez l'algorithme suivant:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud
k : entier
DEBUT
ARBRE-RECHERCHE_ITE(T,k) :
  x ← T.racine
  tant que T ≠ NIL et k ≠ x.clé :
    x ← T.racine
    si k < x.clé :
      T ← x.gauche
    sinon :
      T ← x.droit
    fin si
  fin tant que
  si k == x.clé :
    renvoyer vrai
  sinon :
    renvoyer faux
  fin si
FIN
```

9. **Insertion d'une clé dans un arbre binaire de recherche:**
   Il est tout à fait possible d'insérer un noeud y dans un arbre binaire de recherche (non vide):

   Exercice 13: Étudiez l'algorithme suivant:

```
VARIABLE
T : arbre
x : noeud
y : noeud
DEBUT
ARBRE-INSERTION(T,y) :
  x ← T.racine
  tant que T ≠ NIL :
    x ← T.racine
    si y.clé < x.clé :
      T ← x.gauche
    sinon :
      T ← x.droit
    fin si
  fin tant que
  si y.clé < x.clé :
    insérer y à gauche de x
  sinon :
    insérer y à droite de x
  fin si
FIN
```

   Exercice 14: Appliquez l'algorithme d'insertion d'un noeud y dans un arbre binaire de recherche sur l'arbre précédent. On prendra y.clé = 16.